gon@mathcenter.net

**เฉลยละเอียด ข้อสอบ IWYMIC 2012 ประเภทบุคคล**

1. **ตอบ** 678

| |
|---|
| **แนวคิด** พิจารณาค่าของ $(a-b)^2$ ว่ามีค่าสูงสุดเป็นเท่าไร |

สมมติให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องเงื่อนไขที่โจทย์ต้องการทั้งสองข้อคือ

- มีผลบวกเท่ากับ 2034
- มีผลคูณเป็นพหุคูณของ 2034

โดยไม่เสียนัยทั่วไป จะสมมติให้ $a \geq b$ ดังนั้นจากเงื่อนไขเบื้องต้น จะได้ว่า

$$a + b = 2034 \qquad \ldots (1)$$

$$ab = 2034k \qquad \ldots (2)$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัว

โจทย์ต้องการหาค่า $a-b$ ที่มากที่สุด
เนื่องจาก $a-b$ มีค่ามากที่สุด ก็ต่อเมื่อ $(a-b)^2$ มีค่ามากที่สุด
ดังนั้นเราจะพิจารณาว่า $(a-b)^2$ จะมีค่ามากที่สุดเป็นเท่าไร
เนื่องจาก $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
เพราะฉะนั้น เมื่อแทนค่า $a+b$ และ ab จากสมการ (1) กับ (2) ก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= 2034^2 - 4\cdot 2034k \\ &= 2034\times(2034-4k) \\ &= 3^2\times 2\times 113\times(2034-4k) \\ &= 3^2\times 2^2\times 113\times(1017-2k) \qquad \ldots (*)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(a-b)^2$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ แสดงว่า $3^2\times 2^2\times 113\times(1017-2k)$ จะต้องเป็นกำลังสองสมบูรณ์ด้วย และเนื่องจาก 113 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $3^2\times 2^2\times 113\times(1017-2k)$ จะเป็นกำลังสองสมบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $1017-2k = 113m^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m บางจำนวน (หรือจำนวนเต็มลบก็ได้ แต่ในที่นี้จะให้ m ที่เป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น เพราะได้ผลลัพธ์เหมือนกัน)
พิจารณาสมการ

$$1017 - 2k = 113m^2 \qquad \ldots (3)$$

จะเห็นว่า $1017-2k$ เป็นจำนวนคี่เสมอ แสดงว่า $113m^2$ จะต้องเป็นจำนวนคี่ด้วย นั่นก็คือ m จะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และถ้าจัดรูปเพื่อหาค่า k จะได้ว่า

$$k = \frac{1017 - 113m^2}{2}$$

ถ้า $m = 1$ จะได้ $k = \frac{1017 - 113\times 1^2}{2} = \frac{113\times 9 - 113\times 1}{2} = 4\times 113$

ถ้า $m = 3$ จะได้ $k = \frac{1017 - 113\times 3^2}{2} = \frac{113\times 9 - 113\times 9}{2} = 0$

ในกรณีนี้จะเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า k ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

จึงสรุปได้ว่า $k = 4\times 113$ เท่านั้น และจากสมการ (3) แสดงว่า $1017 - 2k = 113\times 1^2 = 113$ ซึ่งจากสมการ (*) ก็จะได้ว่า

$$(a - b)^2 = 3^2\times 2^2\times 113\times 113$$

$\therefore \quad a - b = 3\times 2\times 113 = 678$

เป็นค่าสูงสุดตามที่ต้องการ

**หมายเหตุ** ถ้าต้องการหาค่า a, b ออกมา ก็ทำได้โดยพิจารณาจากสมการ (1) และ (2) คือ $a + b = 2034$ และ $ab = 2034k = 2034\times 4\times 113 = 3\times \mathbf{3\times 2\times 113}\times 2\times 2\times 113$ จะเห็นว่า ถ้า $a = 3\times 2\times 2\times 113 = 1356$ และ $b = 3\times 2\times 113 = 678$ จะได้ว่า $a + b = 1356 + 678 = 2034$ สอดคล้องตามเงื่อนไขที่ให้มานั่นเอง