(Mathcenter: 16055)

กำหนดให้ $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$

จงหาค่าของ abc

ตอบ 1

จากสมการ $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$

นำ a, b, c หารทั้งตัวเศษและตัวส่วน ในแต่ละพจน์จะได้

$$\frac{1}{b+1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{c+1+\frac{1}{b}}+\frac{1}{a+1+\frac{1}{c}}=1$$

สมมติให้ $x=b+\dfrac{1}{a}$

$y=c+\dfrac{1}{b}$

และ $z=a+\dfrac{1}{c}$

$\therefore$ $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}=1$

นำ $(x+1)(y+1)(z+1)$ คูณตลอดจะได้

$$(y+1)(z+1)+(z+1)(x+1)+(x+1)(y+1)=(x+1)(y+1)(z+1)$$

กระจายจะได้

$$(yz+zx+xy)+2(x+y+z)+3=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$$

$$(x+y+z)+2=xyz \qquad \ldots (*)$$

ให้ $p=a+b+c$

$q=bc+bc+ca$

$r=abc$

เนื่องจาก $x+y+z=(a+b+c)+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=p+\dfrac{q}{r}$

และ
$$\begin{aligned} xyz &= (b+\frac{1}{a})(c+\frac{1}{b})(a+\frac{1}{c}) \\ &= (bc+1+\frac{c}{a}+\frac{1}{ab})(a+\frac{1}{c}) \\ &= abc+a+c+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{abc} \end{aligned}$$

$$= abc + (a + b + c) + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + \frac{1}{abc}$$

$$= r + p + \frac{q}{r} + \frac{1}{r}$$

แทนค่า $x + y + z$ และ xyz ในสมการ (*) จะได้

$$p + \frac{q}{r} + 2 = r + p + \frac{q}{r} + \frac{1}{r}$$

$\therefore$ $$2 = r + \frac{1}{r}$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$(r - 1)^2 = 0$$

ดังนั้น $r = 1$