



ศูนย์ส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ศึกษา (สอวน.)

ศูนย์โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

แบบทดสอบเพื่อคัดเลือกตัวแทนศูนย์ สอวน. วิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2564

สอบวันเสาร์ที่ 2 เมษายน พ.ศ. 2565 เวลาสอบ 8.30 – 12.00 น. (210 นาที) คะแนนเต็ม 28 คะแนน

### คำชี้แจงการทำแบบทดสอบ

#### อ่านคำชี้แจงก่อนลงมือทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้ใช้เวลาทำ 210 นาที คะแนนเต็ม 28 คะแนน
2. แบบทดสอบฉบับนี้มี 2 หน้า (รวมหน้าปก) จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน รวมเป็น 28 คะแนน
3. ให้นักเรียนเขียนรหัสผู้เข้าสอบในกระดาษคำตอบทุกแผ่น โดยห้ามเขียนชื่อ-สกุล หรือสัญลักษณ์อื่นใดที่สามารถระบุตัวตนลงในกระดาษคำตอบ
4. ให้นักเรียนตอบคำถามด้วยการอธิบาย/แสดงวิธีทำ ภายในบริเวณกรอบสี่เหลี่ยมของกระดาษคำตอบที่กำหนดให้ และระบุข้อที่ แผ่นที่ และจำนวนแผ่นทั้งหมดในกระดาษคำตอบให้เรียบร้อย
5. ห้ามทำการคัดลอกหรือเผยแพร่ข้อสอบก่อนการประกาศผลสอบโดยเด็ดขาด มิฉะนั้นจะถือว่าเป็นความผิดฐานละเมิดลิขสิทธิ์ และถูกตัดสิทธิ์จากการสอบ
6. ห้ามใช้เครื่องคิดเลข หรือเครื่องช่วยในการคำนวณอื่นๆ ทุกชนิด

คำตัดสินของคณะกรรมการถือเป็นที่สุด

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  ต่อด้าน  $BC$  เป็นเส้นตรงไปทางจุด  $C$  ถึงจุด  $D$  โดยที่ความยาว  $CD = AC$  ให้  $P$  เป็นจุดตัดอีกจุดหนึ่งของวงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยม  $ACD$  และวงกลมซึ่งมี  $BC$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางลากเส้นตรง  $BP$  ตัดกับด้าน  $AC$  ที่จุด  $E$  และเส้นตรง  $CP$  ตัดกับด้าน  $AB$  ที่จุด  $F$  จงแสดงว่า  $D, E, F$  อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

2. กำหนดให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จงแสดงว่า

$$(a + b)(b + c)(c + a) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 6\sqrt[3]{abc}(a + b + c + \sqrt[3]{abc})$$

3. กำหนดให้  $S$  เป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สำหรับจำนวนเต็ม 3 จำนวนที่แตกต่างกันใด ๆ จะเรียกว่ามีคุณสมบัติ “วันเดอร์” ถ้ามีอย่างน้อย 1 รูปแบบ โดยไม่เสียหายให้เป็น  $a, b, c$  ซึ่ง

$$(a + b - 2c)^2 \text{ หาร } abc \text{ ลงตัว}$$

จงแสดงว่า

3.1 มีเซต  $S$  ที่ประกอบด้วยสมาชิกจำนวน 4 ตัว ซึ่งสมาชิก 3 ตัวที่แตกต่างกันใด ๆ มีคุณสมบัติ “วันเดอร์”

3.2 สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n \geq 3$  ใด ๆ มีเซต  $S$  ที่ประกอบด้วยสมาชิกจำนวน  $n$  ตัว ซึ่งสมาชิก 3 ตัวที่แตกต่างกันใด ๆ มีคุณสมบัติ “วันเดอร์”

4. สำหรับเซต  $M$  ใด ๆ ให้สัญลักษณ์  $|M|$  แทนจำนวนสมาชิกในเซต  $M$

กำหนดให้  $X$  เป็นเซตจำกัดซึ่ง  $|X| = n$  โดยที่  $n \geq 3$  ให้  $A_1, A_2, \dots, A_m$  เป็นสับเซตของ  $X$  โดยที่

$$|A_i| = 3 \text{ และ } |A_i \cap A_j| \leq 1 \text{ เมื่อ } i \neq j \text{ สำหรับทุก } i, j = 1, 2, \dots, m$$

ให้  $A$  เป็นสับเซตของ  $X$  ที่มีจำนวนสมาชิกมากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$A_i \not\subset A \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, \dots, m$$

ถ้า  $|A| = k$  จงแสดงว่า  $n - k \leq \binom{k}{2}$

*Good Luck*