



ศูนย์ส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ศึกษา (สอวน.)

ศูนย์โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

แบบทดสอบเพื่อคัดเลือกตัวแทนศูนย์ สอวน. วิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2563

สอบวันเสาร์ที่ 3 กรกฎาคม พ.ศ. 2564 เวลาสอบ 8.30 – 12.00 น. (210 นาที) คะแนนเต็ม 28 คะแนน

คำชี้แจงการทำแบบทดสอบ

อ่านคำชี้แจงก่อนลงมือทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้ใช้เวลาทำ 210 นาที คะแนนเต็ม 28 คะแนน
2. แบบทดสอบฉบับนี้มี 2 หน้า (รวมหน้าปก) จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน รวมเป็น 28 คะแนน
3. ให้นักเรียนเขียนรหัสผู้เข้าสอบในกระดาษคำตอบทุกแผ่น โดยห้ามเขียนชื่อ-สกุล หรือสัญลักษณ์อื่นใดที่สามารถระบุตัวตนลงในกระดาษคำตอบ
4. ให้นักเรียนตอบคำถามด้วยการอธิบาย/แสดงวิธีทำ ภายในบริเวณกรอบสี่เหลี่ยมของกระดาษคำตอบที่กำหนดให้ และระบุข้อที่ แผ่นที่ และจำนวนแผ่นทั้งหมดในกระดาษคำตอบให้เรียบร้อย
5. ห้ามทำการคัดลอกหรือเผยแพร่ข้อสอบก่อนการประกาศผลสอบโดยเด็ดขาด มิฉะนั้นจะถือว่าเป็นความผิดฐานละเมิดลิขสิทธิ์ และถูกตัดสิทธิ์จากการสอบ
6. ไม่อนุญาตให้นักเรียนใช้เครื่องคิดเลข หรือเครื่องช่วยในการคำนวณอื่นๆ ทุกชนิด

คำตัดสินของคณะกรรมการถือเป็นที่สุด

1. กำหนดให้ a, b, c, d, e เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งสอดคล้องกับสมการ $a + b + c + d + e = 1$ จงแสดงว่า

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}} + \frac{b}{\sqrt{1-b}} + \frac{c}{\sqrt{1-c}} + \frac{d}{\sqrt{1-d}} + \frac{e}{\sqrt{1-e}} \geq \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e})$$

2. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรานิยาม $\alpha(n)$ ให้เป็นจำนวนของ m ทั้งหมด โดยที่ $m \leq n$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\gcd(m, n) = \gcd(m + 1, n) = \gcd(m + 2, n) = 1$$

2.1. จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด ที่ทำให้ $\alpha(n) = 0$

2.2. จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด ที่ทำให้ $\alpha(n) = 10$

3. กำหนดให้ ω เป็นรูปวงกลม ซึ่งมีจุด A, B, C อยู่บนเส้นรอบวง (จุดทั้งสามแตกต่างกัน) ให้ D เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ไม่มีจุด C อยู่ ลากเส้นตรง AB และ CD มาตัดกันที่จุด E และกำหนดจุดต่อไปนี้

I เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABD

J เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ACD

K เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม AED

จงแสดงว่าขนาดของมุม $\angle JIK$ ไม่ขึ้นอยู่กับการเลือกจุด D

4. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_1, a_2, \dots, a_n \in [1, 2021]$ เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน จงหา n ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้มี a_i, a_j โดย $1 \leq i, j \leq n$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$0 < a_i - a_j < 1 + 3\sqrt[3]{a_i a_j}$$

Good Luck